1.Основа призме *ABCA*1*B*1*C*1 je једнакостранични троугао *ABC*са страницом *a*. Ортогонална пројекција темена *A*1је центар основе *ABC*, а бочне ивице образују са равни основе угао 60*o*. Нађите површину омотача призме.

**Решење**

Нека је *O*– центар основе *ABC*дате призме *ABCA*1*B*1*C*1, *M*и *K*– средишта ивица *BC*и *AB*редом, *S*– површина омотача призме. Пошто је *O*– ортогонална пројекција темена *A*1на раван основе *ABC*, *OA*– ортогонална пројекција бочне ивице *AA*1на ту раван. Тада је  *A*1*AM*– угао бочне ивице *AA*1са равни основе *ABC*. По условима задатка * A*1*AM =*60*o*. Из правоуглог троугла *A*1*AM*налазимо, да је

*AA*1*=  = ·  = · a·*2*= a,*

*OA*1*= OA tg  A*1*AM = a tg*60*o = a·  = a.*

Пошто је *AM  BC*, по теореми о три нормале *AA*1* BC*, а пошто је *BB*1*|| AA*1, то *BB*1* BC*. Значи, *BB*1*C*1*C* је правоугаоник. Зато је

*SBB*1*C*1*C = BC· BB*1*= a· a = a*2*.*

Пошто је *OK*– ортогонална пројекција отсечка *A*1*K*, по теореми о три нормале *A*1*K  AB*. Значи, *A*1*K* је висина паралелограма *AA*1*B*1*B*. Из правоуглог троугла *A*1*KO*налазимо, да је

*A*1*K =  =  = .*

Зато је

*SAA*1*B*1*B = AB· A*1*K = a·  = .*

Аналогно налазимо, да је *SAA*1*C*1*C = *. Следи,

*S = SBB*1*C*1*C + SAA*1*B*1*B + SAA*1*C*1*C = a*2* +*2*·  =*

*= a*2* +  =  +  = .*

2. Свака ивица косе тростране призме једнака је 2. Једна од бочних ивица образује са суседним ивицама основе углове од 60*o*. Нађите запремину и површину призме.

**Решење**

Нека бочна ивица *AA*1дате призме *ABCA*1*B*1*C*1образује са ивицама  *AB*и *AC*основе  *ABC*углове 60*o*. Како су све ивице призме једнаке, то су стране *AA*1*B*1*B*и *AA*1*C*1*C*– ромбови са страницом 2 и оштрим углом 60*o*. Значи, *A*1*B = A*1*A = A*1*C =*2. Све су ивице троугла пирамиде *A*1*ABC*једнаке, па је *A*1*ABC*– правилан тетраедар са ивицом 2. Његова висина *A*1*O*једнака је 2**. А истовремено је *A*1*O*– висина дате призме *ABCA*1*B*1*C*1. Следи,

*VABCA*1*B*1*C*1*= SΔ ABC· A*1*O = ·*2* =*2*.*

Пошто је *A*1*B = A*1*C*, то је тачка *O*једнако удаљена од краја отсечка *BC*. Значи, *AO  BC*. Тада по теореми о три нормале *A*1*A  BC*, а пошто је *B*1*B || A*1*A*, то страна је *BB*1*C*1*C*– правоугаоник, све странице једнаке, значи да је квадрат. Нека је *S*– површина призме *ABCA*1*B*1*C*1. Тада

*S =*2*SΔ ABC +*2*SAA*1*B*1*B + SBB*1*C*1*C =*2* +*4* +*4*=*4*+*6*.*

3. Основа паралелопипеда је квадрат. Једно од темена горње основе је једнако удаљено од свих темена доње основе и налази се на растојању *b*од те основе. Основна ивица једнака је *a*. Нађите површину паралелопипеда.

**Решење**

Нека је *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1– дати паралелопипед с основама *ABCD*, *A*1*B*1*C*1*D*1и бочним ивицама *AA*1, *BB*1, *CC*1и *DD*1, при чему је *ABCD*– квадрат са страницама *a*, теме *B*1је једнако удаљено од темена *A*, *B*, *C*и *D*, и растојање од темена *B*1до равни основе *ABCD*једнако је *b*. Пошто је тачка *B*1једнако удаљена од темена квадрата*ABCD*, она лежи на нормали ка равни *ABCD*, која пројази кроз центар *O*квадрата. Нормала, спуштена из тачке *O*на страницу *BC*, пролази кроз њено средиште*M*. По теореми о три нормале *B*1*M  BC*, па је *B*1*M*– висина стране *BB*1*C*1*C*. Из правоуглог троугла *B*1*OM*налазимо, да је

*B*1*M =  = .*

Значи,

*SAA*1*D*1*D = SBB*1*C*1*C = BC· B*1*M = a.*

Аналогно,

*SAA*1*B*1*B = SDD*1*C*1*C = a.*

Ако је *S*– површина паралелопипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1, то

*S =*2$а^{2}$*+*4*a =*2*a*(*a + *)*.*

4. Основа паралелoпипеда je ромб сa стрaницом *a*, и оштрим углом 30*o*. Дијагонала једне бочне стране нормална је на раван основе, а бочна ивица нагнута је ка равани основе под углом од 60*o*. Нађите површину и запремину паралелопипеда.

**Решение**

Нека је дијагонала *B*1*C*бочне стране *BB*1*C*1*C*датог паралелопипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1нормалана на раван основе *ABCD*, где је *ABCD*– ромб са страницом  *a*. Тада је *B*1*C*– висина паралелопипеда, а *BC*– ортогонална пројекција бочне ивице *BB*1на раван основе *ABCD*. По условима задатка * B*1*BC =*60*o*. Значи,

*B*1*C = BC tg  B*1*BC = a.*

Следи,

*VABCDA*1*B*1*C*1*D*1*= SABCD· B*1*C =* $a^{2}$*sin*30*o· a = .*

Нека је *S*– површина паралелопипеда, *B*1*K*– висина стране *AA*1*B*1*B*. Тада по теореми о три нормале *CK*је висина ромба *ABCD*. Пошто је

*CK = BC sin*30*o = , B*1*K =  =  = .*

Следи,

*S =*2(*SABCD + SBB*1*C*1*C + SAA*1*B*1*B*)*=*2(*AB· AD sin*30*o + BC· B*1*C + AB· B*1*K*)*=*

*=*2(* +* $a^{2}$* +* $a^{2}$**)*=* $a^{2}$(1*+*2* + *)*.*

5. Ивице паралелопипеда једнаке су *a*, *b*и *c*. Ивице, једнаке *a*и *b*, узајамно су нормалне, а ивица, једнака *c*, образује са сваком од њих угао 60*o*. Нађите запремину паралелопипеда.

**Решење**

Нека је *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1– дати паралелопипед, у коме је

*AB = a, AD = b, AA*1*= c,*

* BAD =*90*o,  A*1*AB =  A*1*AD =*60*o.*

Из тачке *H*висине *A*1*H*паралелопипеда спустимо нормале *HP*и *HQ*на праве *AB*и *AD*редом. По теореми о три нормале *A*1*P  AB*и *A*1*Q  AD*. Из једнакости правоуглих троуглова  *A*1*AP*и *A*1*AQ*следи, да је *A*1*P = A*1*Q*. Пошто је *HP = HQ*. Значи, *AH* је бисектриса угла *BAD*. Означимо * A*1*AH = α*. Тада је

*AH = AA*1*cos α = c cos α, A*1*H = AA*1*sin α = c sin α,*

*AP = AA*1*cos  A*1*AP = AA*1*cos *60*o = ,*

*AP = AH cos  PAH = c cos α cos*45*o = .*

Из једнакости * = *налазимо, да је *cos α = *, отуда *α=*45*o*. Значи,

*A*1*H = c sin α = .*

Следи,

*VABCDA*1*B*1*C*1*D*1*= SABCD· A*1*H = .*

6. Основа косог паралелопипеда је ромб, странице 60. Дијагонални пресек, раван која пролази кроз већу дијагоналу основе, нормална је на раван основе. Површина тог пресека једнака је 7200. Нађите мању дијагоналу основе, ако је бочна ивица једнака 80 и образује са равни основе угао 60*o*.

**Решење**

Нека раван дијагоналног пресека *AA*1*C*1*C*, пролази кроз већу дијагоналу *AC*основе *ABCD*паралелопипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1, и нормална је на основу *ABCD*. Тада нормала *C*1*K*, спуштена из темена *C*1на раван основе *ABCD*, је истовремено и висина паралелопипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. Значи, *C*1*CK* је угао бочне ивице *CC*1са равни основе *ABCD*. По условима задатка * C*1*CK =*60*o*. Због тога је,

*SA*1*C*1*C = CC*1*· AC sin  C*1*CK =*80*AC· sin*60*o =*40*AC·  =*7200*,*

одакле налазимо, да је *AC =*60**. Збир квадрата дијагонала паралелограма једнака је збиру квадрата свих његових страница, па је

$BD^{2}$*+* $AC^{2}$*=*4*·* $AB^{2}$*,*

отуда налазимо, да је

$BD^{2}$*=*4*·* $AB^{2}$*-* $AC^{2}$*=*4*·*602*-*3*·*602*=*602*.*

Следи, *BD =*60.

7. У паралелопипеду *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1страна *ABCD*је квадрат странице 5, ивица  *AA*1такође једнака 5, и та ивица образује са ивицама *AB*и *AD*углове од 60*o*. Нађите дијагоналу  *BD*1.

**Решење**

*Први начин*
Троугао *AA*1*B*је једнакостранични, пошто је *AA*1*=AB*и * BAA*1*=*60*o*. Тада је *A*1*B = AA*1*=*5. Аналогно, *A*1*D =*5. Бочне ивице *A*1*A*, *A*1*B*и *A*1*D*тростране пирамиде *A*1*ABD*са врхом  *A*1су једнаке,што значи да висина  *A*1*O*те пирамиде пролази кроз центар кружнице, описане око основе  *ABD*, а пошто је троугао *ABD* правоугли, то је тачка *O*– средиште његове хипотенузе *BD*, тј. центр квадрата *ABCD*. Из правоуглог троугла *OBA*1налазимо, да је

*A*1*O =  =  = .*

Пошто је *D*1*C = A*1*B = A*1*A = D*1*D*, тачка *D*1је једнако удаљена од темена *C*и *D*, па је ортогонална пројекција *K*на раван основе *ABCD*такође једнако удаљена од *C*и *D*, и значи, лежи на средини нормале ка одсечку *CD*. Пошто је *D*1*K || A*1*O*и *D*1*K =A*1*O*, четвороугао *A*1*D*1*KO*је правоугаоник, пошто је *OK = A*1*D*1*=*5. Продужимо отсечак *KO*до пресека са отсечком *AB*у тачки *M*. Тада је *M*– средина *AB*и *MK = MO+OK = *. Из правоуглих троуглова *MKB*и *KBD*1налазимо, да је

*BK =  =  = ,*

*BD*1*=  =  = =  =*5*.*

8. Основа прaве призме је једнакокраки трапез са оштрим углом *α*. Крак трапеза и његова мања основа су једнаки. Нађите запремину призме, ако је дијагонала призме једнака *a*и образује са равни основе угао *β.*

**Решење**

Нека је *ABCD*– основа дате призме *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1, при чему су *AD*и *BC*– основице трапеза *ABCD*,

*AB = BC = CD,  BAD =  CDA = α,  ACA*1*= β.*

Пошто је *AB = BC*, троугао *ABC*– једнакокраки, па је

* CAD =  ACB =  BAC = .*

Из правоуглог троугла *ACA*1налазимо, да је

*AA*1*= A*1*C sin  ACA*1*= a sin β, AC = A*1*C cos  ACA*1*= a cos β.*

Нека је *CK*– висина трапеза *ABCD*. Тада

*DK = *(*AD - BC*)*, AK = AD - DK = AD - *(*AD - BC*)*= *(*AD+BC*)*,*

*CK = AC sin  CAK = a cos β sin ,*

*AK = AC cos  CAK = a cos β cos .*

Па је

*SABCD = *(*AD+BC*)*· CK = AK· CK = a cos β sin · a cos β cos  = a*2*cos*2*β sin α.*

Следи,

*VABCDA*1*B*1*C*1*D*1*= SABCD· AA*1*= a*2*cos*2*β sin α · a sin β =*

*= a*3*sin α sin β cos*2*β.*

9.Нађите запремину праве призме, чија је основа правоугли троугао са оштрим углом *α*, ако је бочна ивица призме једнака *l*и образује са дијагоналом веће бочне стране угао *β*.

**Решење**

Нека је *AB*– хипотенуза правоуглог троугла *ABC*, који лежи у основи праве призме *ABCA*1*B*1*C*1, при чему је * ABC = α*. Тада *AA*1*B*1*B*– највећа бочна страна призме *ABCA*1*B*1*C*1. По условима задатка дијагонала *AB*1те стране образује са ивицом *AA*1угао *β*. Тј. * A*1*AB*1*= β*. Тада

*AB = A*1*B*1*= AA*1*tg  A*1*AB*1*= l tg β ,*

*BC = AB cos  ABC = l tg β cos α, AC = AB sin  ABC = l tg β sin α,*

*SΔ ABC =  AC· BC = l tg β sin α · l tg β cos α = l*2*sin*2*α tg*2*β.*

Следи,

*VABCA*1*B*1*C*1*= SΔ ABC· AA*1*= l*2*sin*2*α tg*2*β · l = l*3*sin*2*α tg*2*β.*

10. У правилној тространој призми *ABCA*1*B*1*C*1(*AA*1*|| BB*1*|| CC*1)угао између правих  *AC*1и *A*1*B*једнак ј*е* *α*, *AA*1*=*2. Нађите *AB*.

**Решење**

Кроз теме *A*поставимо праву, паралелну дијагонали *BA*1бочне стране *ABB*1*A*1. Нека та права пересеца продужетак ивице *A*1*B*1*у* тачки *M*. Означимо са *a* основну ивицу призме. Четвороугао *AMA*1*B*је паралелограм, пошто је *MA*1*=AB = A*1*B*1*= a*. Из једнакокраког троугла *MA*1*C*1са бочним странама *A*1*M=A*1*C=a*и углом 120*o*међу њима налазимо, да је *MC*1*=a*. Права *AM  је* паралелна правој *BA*1, по је угао међу правама *AC*1и *A*1*B*једнак углу међу правама *AC*1и *AM*, тј. *α*. Из правоуглих троуглова *AA*1*M*и*AA*1*C*1налазимо, да је

*AM= = , AC*1*= = .*

Размотримо једнакокраки троугао *AMC*1. По теореми косинусној

$MC\_{1}^{2}$*=* $AM^{2}$*+*$AC\_{1}^{2}$*-*2*AM· AC*1*cos  MAC*1*,*

или

3$a^{2}$*=*2($a^{2}$*+*4)*-*2($a^{2}$*+*4)*cos α,*

отуда

$a^{2}$*= =  = .*

Следи,

*AB=x=*